Kapitola 7

NEURČITÝ INTEGRÁL

Pojem neurčitého integrálu patří ke stěžejním pojmům matematické analýzy a matematiky vůbec. Historicky vedly k zavedení integrálu dvě úlohy: potřeba určení funkce, jejíž derivaci známe a výpočet obsahu rovinné oblasti. První z nich se řeší pomocí neurčitého integrálu, druhá pomocí určitého integrálu, kterým se budeme zabývat v 8. kapitole. Integrální počet se pak zabývá vlastnostmi a výpočtem obou těchto podob integrálu. Množství aplikací najdeme v nejrůznějších technických i ekonomických oborech.

7.1 Primitivní funkce, neurčitý integrál

Motivační úloha k pojmu primitivní funkce

V 5. kapitole jsme řešili problém nalezení derivace dané funkce. Nyní se budeme zabývat opačným problémem.

Předpokládejme, že je zadaná funkce $f(x) = x^2$ a naším úkolem je najít funkci $F(x)$ tak, aby platilo $F'(x) = f(x)$. Zřejmě $F(x) = \frac{x^3}{3}$, protože platí $\left[\frac{x^3}{3}\right]' = x^2$.

Platí však také $\left[\frac{x^3}{3}+1\right]' = x^2$, $\left[\frac{x^3}{3}-5\right]' = x^2$, …, a obecně $\left[\frac{x^3}{3}+c\right]' = x^2$, kde c je libovolná konstanta.

Primitivní funkce

Definice 7.1.: Funkce $F(x)$ se nazývá primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu $(a,b) \subseteq \mathbf{R}$, jestliže pro všechna x z tohoto intervalu platí $F'(x) = f(x)$.

Z úvodního příkladu je zřejmé, že má-li daná funkce $f(x)$ primitivní funkci, je takových funkcí nekonečně mnoho a liší se pouze konstantou.

Mnohoznačnost primitivní funkce

Věta 7.2.: Nechť funkce $F(x)$ je primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu $(a,b) \subseteq \mathbf{R}$. Pak pro libovolné číslo $c \in \mathbf{R}$ je také funkce $F(x)+c$ primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu (a,b).

Grafy dvou funkcí primitivních k dané funkci na intervalu (a,b) se liší v celém tomto intervalu pouze o konstantu. Jejich grafy jsou tedy posunuté ve směru osy y.

Z diferenciálního počtu víme, že nutnou podmínkou pro to, aby funkce měla derivaci, je její spojitost (viz věta 5.2.). Proto zřejmě platí věta:

Spojitost primitivní funkce

Věta 7.3.: Funkce $F(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu $(a,b) \subseteq \mathbf{R}$ je v tomto intervalu spojitá.

Odpověď na otázku, zda ke každé funkci existuje primitivní funkce, dává věta 7.4.

Existence primitivní funkce

Věta 7.4.: Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $(a,b) \subseteq \mathbf{R}$, pak k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce.

Opačná věta neplatí. Existují tedy funkce, které nejsou na určitém intervalu spojité, ke kterým však na tomto intervalu existuje primitivní funkce.

Neurčitý integrál

Definice 7.5.: Množinu všech primitivních funkcí $F(x)$ k funkci $f(x)$ na intervalu $(a,b) \subseteq \mathbf{R}$ nazýváme neurčitým integrálem funkce $f(x)$.

Píšeme $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

Postup hledání primitivních funkcí k daným funkcím budeme nazývat integrování. Budeme přitom používat následující označení:

integrovaná funkce (integrand)
diferenciál integrační proměnné

integrační znak ← $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ → integrační konstanta

integrační proměnná
primitivní funkce

Poznámka: Následující vzorce a tvrzení platí na intervalech, na kterých existují příslušné primitivní funkce. Pokud nebude tento interval uveden, budeme jím rozumět interval, na kterém je integrovaná funkce spojitá.

Pravidla pro integraci součtu, rozdílu a součinu funkce s konstantou

Věta 7.6.: Existuji-li integrály na pravé straně rovností, pak platí:

- $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx,$
- $\int c.f(x)\,dx = c.\int f(x)\,dx,$ kde $c \in \mathbf{R}$,

(levé a pravé strany vzorců se mohou lišit o konstantu).

Základní integrační vzorce

Nejčastější úlohou integrálního počtu je nalezení primitivní funkce k dané funkci. Pro řadu jednodušších funkcí k tomu používáme tzv. základní integrační vzorce. Jejich platnost je možné ověřit přímo derivováním. Znalost těchto vzorců je nutná pro výpočet nejrůznějších typů integrálů a jejich aplikací.

I. $\int dx = x + c$

II. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$

III. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$

IV. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

V. $\int e^x \, dx = e^x + c$

VI. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

VII. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

VIII. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c$

IX. $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + c$

X. $\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{A} + c$

XI. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}} \, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm B}\right| + c$

XII. $\int \frac{1}{A^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{x}{A} + c$

XIII. $\int \frac{1}{A^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2A} \ln\left|\frac{A + x}{A - x}\right| + c$

XIV. $\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + c$

XV. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + c$

V následujících příkladech se seznámíte se základními postupy, používanými při integrování pomocí základních vzorců. V některých z nich bude možné přímo použít vzorec, u jiných bude třeba integrovanou funkci nejprve upravit a teprve pak ji budeme integrovat. Ve všech příkladech budeme předpokládat integraci na intervalu, ve kterém neurčitý integrál existuje.

Příklad 7.1.

Pomocí základních vzorců a úpravami integrované funkce vypočtěte zadané integrály.

Abychom mohli použít II. vzorec, upravujeme obecnou mocninu na tvar x^n. Výjimkou je integrování funkce $\frac{1}{x}$, kdy použijeme III. vzorec.

1) $\int\left(x^2+2x-\frac{3}{x^2}\right)dx=\int x^2dx+\int 2xdx-\int 3x^{-2}dx=|\text{vz.II}|=\frac{x^3}{3}+c_1+\frac{2x^2}{2}+c_2-3\frac{x^{-1}}{-1}+c_3=$

$=\frac{x^3}{3}+x^2+\frac{3}{x}+c$ (konstanty budeme sčítat)

2) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{3}}\right)dx=|\text{vz.II}|=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+c=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2}+c$

3) $\int\frac{(x+2)^2}{x^2}dx=\int\frac{x^2+4x+4}{x^2}dx=\int\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}+\frac{4}{x^2}\right)dx=\int\left(1+\frac{4}{x}+4x^{-2}\right)dx=|\text{vz.II,III}|=$

$=x+4\ln|x|+4\frac{x^{-1}}{-1}+c$

4) $\int \text{tg}^2\,xdx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\text{tg}\,x-x+c$

Při používání vzorců X-XIII si všimněte toho, co je jim společné a čím se liší. Pokud je ve jmenovateli úplný kvadratický trojčlen, upravíme ho na čtverec a zbytek a teprve potom použijeme odpovídající základní vzorec.

5) $\int\frac{2}{x^2+9}dx=2\int\frac{1}{x^2+3^2}dx=|\text{vz.XII}|=\frac{2}{3}\text{arctg}\frac{x}{3}+c$

6) $\int\frac{3}{x^2+4x+10}dx=3\int\frac{1}{x^2+4x+4+6}dx=3\int\frac{1}{(x+2)^2+6}dx=|\text{vz.XII}|=\frac{3}{\sqrt{6}}\text{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+c$

7) $\int\frac{4}{\sqrt{x^2-3}}dx=|\text{vz.XI}|=4\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+c$

8) $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-6x+12}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{(x-3)^2+3}}dx=|\text{vz.XI}|=\ln\left|(x-3)+\sqrt{x^2-6x+12}\right|+c$

9) $\int\frac{3}{\sqrt{2-x^2}}dx=|\text{vz.X}|=3\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+c$

10) $\int\frac{1}{4-x^2}dx=|\text{vz.XIII}|=\frac{1}{2.2}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+c$

11) $\int\frac{5}{x^2-3}dx=-5\int\frac{1}{3-x^2}dx=|\text{vz.XIII}|=-\frac{5}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right|+c$

Integrujte pomocí vzorce č. XV

12) $\int \frac{2x}{x^2-5}\,dx = \ln\left|x^2-5\right| + c$

Pokud je čitatel integrované funkce derivací jmenovatele, je výsledkem integrálu přirozený logaritmus absolutní hodnoty jmenovatele. Pokud je to potřeba, je možné čitatele upravit vytknutím a rozšířením.

13) $\int \frac{2x^2}{x^3+2}\,dx = 2\cdot\frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+2}\,dx = \frac{2}{3}\ln\left|x^3+2\right| + c$

14) $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln\left|\cos x\right| + c$

Integrujte pomocí vzorce č. XIV

15) $\int \cos(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x+1) + c$

Je-li vnitřní složkou složené funkce lineární výraz $(ax+b)$, je výsledkem integrálu součin čísla $\frac{1}{a}$ a primitivní funkce k integrované funkci (se stejnou vnitřní složkou).

16) $\int \sqrt{4x-3}\,dx = \int (4x-3)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{4}\frac{(4x-3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{6}\sqrt{(4x-3)^3} + c$

17) $\int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c$

Integrace jednoduchých racionálních lomených funkcí

Neryze lomenou racionální funkci vyjádříme vydělením jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce. Pokud má tato ryze lomená funkce tvar $\frac{A}{(ax+b)^n}$ nebo $\frac{A}{ax^2+bx+c}$, integrujeme ji pomocí některého ze vzorců XII, XIII, XIV, popřípadě XV. Integrace složitějších lomených funkcí bude probrána později.

Příklad 7.2.

Vypočítejte integrál:

1) $\int \frac{x^2}{x^2+2}\,dx = \left|\text{dělíme}\right| = \int 1 - \frac{2}{x^2+2}\,dx = \left|\text{vz.XII}\right| = x - 2\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + c$

Jiný způsob výpočtu spočívá v přičtení a odečtení vhodné konstanty k čitateli a následné rozdělení integrované funkce na dva zlomky:

$$\int \frac{x^2}{x^2+2}\,dx = \int \frac{x^2+2-2}{x^2+2}\,dx = \int \frac{x^2+2}{x^2+2} - \frac{2}{x^2+2}\,dx = \int 1 - \frac{2}{x^2+2}\,dx = \ldots$$

2) $\int \frac{12x^3-13x^2+4x-1}{4x+1}\,dx = \left|\text{dělíme}\right| = \int 3x^2-4x+2-\frac{3}{4x+1}\,dx = 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 2x -$

$-3\cdot\frac{1}{4}\ln\left|4x+1\right| + c = x^3 - 2x^2 + 2x - \frac{3}{4}\ln\left|4x+1\right| + c$

3) $\int \frac{2}{(3x-2)^4}\,dx = 2\int (3x-2)^{-4}\,dx = \left|\text{vz.XIV}\right| = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-2)^{-3}}{-3} + c = -\frac{2}{9(3x-2)^3} + c$

Úlohy 7.1.

1. a) $\int (6x^2+8x+3)dx$, b) $\int (\sqrt{x}+1).(x-\sqrt{x}+1)dx$, c) $\int \frac{x^2.\sqrt{x}}{x^5}dx$, d) $\int \left(\frac{4-x^3}{x}\right)^2 dx$,

e) $\int (5a+2x)^3 dx$, f) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt[4]{x^3}\right)dx$.

2. a) $\int \mathrm{tg}^2 x dx$, b) $\int \frac{\sin 2x}{\sin x}dx$, c) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx$, d) $\int \left(7e^x-\frac{5}{x}\right)dx$, e) $\int e^{x+1}dx$, f) $\int \frac{3.2^x-2.3^x}{2^x}dx$.

3. a) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$, b) $\int \left(\frac{3x^3}{x^4+5}-\frac{1}{10^x}\right)dx$, c) $\int (3x-1)^5 dx$, d) $\int \frac{2}{\sqrt[3]{2x-1}}dx$, e) $\int \sin\left(1-\frac{3}{4}x\right)dx$,

f) $\int 3\mathrm{cotg} x\, dx$.

4. a) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$, b) $\int \frac{(1+x)^2}{x.(1+x^2)}dx$, c) $\int \frac{2x^3+6x^2+7}{x+1}dx$, d) $\int \frac{2x^3+8x^2+20x+1}{x^2+4x+10}dx$.

Výsledky úloh 7.1.

1. a) $2x^3+4x^2+3x+c$, b) $\frac{2}{5}x^2.\sqrt{x}+x+c$, c) $-\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{x}}{x^2}+c$, d) $-\frac{16}{x}-4x^2+\frac{1}{5}x^5+c$,

e) $125a^3x+75a^2x^2+20ax^3+2x^4+c$, f) $4\sqrt{x}+9.\sqrt[3]{x}-\frac{4}{7}x.\sqrt[4]{x^3}+c$.

2. a) $\mathrm{tg}x-x+c$, b) $2\sin x+c$, c) $-\mathrm{cotg}x-2x+c$, d) $7e^x-5\ln|x|+c$, e) $e^{x+1}+c$,

f) $3x-\frac{2.(1{,}5)^x}{\ln 1{,}5}+c$.

3. a) $\ln|1+\sin x|+c$, b) $\frac{3}{4}\ln|x^4+5|+\frac{10^{-x}}{\ln 10}+c$, c) $\frac{(3x-1)^6}{18}+c$, d) $\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{(2x-1)^2}+c$,

e) $\frac{4}{3}\cos\left(1-\frac{3}{4}x\right)+c$, f) $3\ln|\sin x|+c$.

4. a) $x-\mathrm{arctg}x+c$, b) $\ln|x|+2\mathrm{arctg}\, x+c$, c) $\frac{2x^3}{3}+2x^2-4x+11\ln|x+1|+c$,

d) $x^2+\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{x}+2}{\sqrt{6}}+c$.

7.2 Integrace substituční metodou

Zatímco derivaci součinu dvou funkcí můžeme počítat přímo pomocí vzorce, pro integraci součinu podobný vztah nemáme. Abychom mohli počítat také tyto integrály a integrály složitějších funkcí, musíme použít některou ze základních integračních metod : substituční metodu nebo metodu per partes. Nyní se seznámíme s první z nich.

Substituce typu $t=\varphi(x)$

Věta 7.7: Nechť funkce $t=\varphi(x)$ má derivaci na intervalu (α,β) a zobrazuje ho na interval (a,b). Nechť funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu (a,b). Pak na intervalu (α,β) platí

$$\int f(\varphi(x)).\varphi'(x)\,dx=\int f(t)\,dt,$$

dosadíme-li do primitivní funkce na pravé straně $t=\varphi(x)$.

Integraci substituční metodou provádíme podle následujícího schématu:

$$\int f(\varphi(x)).\varphi'(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{subst.}: t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \end{array} \right| = \int f(t)dt = F(t) + c = F(\varphi(x)) + c$$

Za novou proměnnou *t* často volíme vnitřní složku $\varphi(x)$ složené funkce.

Abychom určili vztah mezi diferenciálem „původní“ proměnné *x* a „nové“ proměnné *t*, budeme substituční rovnici diferencovat, tj. vypočítáme derivace obou stran substituční rovnice násobené příslušnými diferenciály proměnných *t* a *x*.

Pak zavedeme do daného integrálu novou proměnnou a dostaneme $\int f(t)\,dt$. Za předpokladu, že umíme najít primitivní funkci $F(t)$, dosadíme do ní na závěr $t = \varphi(x)$, abychom dostali výsledek v původní proměnné *x*.

Příklad 7.3.

Substituční metodou vypočítejte integrál:

a) $\displaystyle\int \frac{2}{(4x+7)^2}\,dx$, b) $\displaystyle\int \cos(7x-18)\,dx$, c) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$.

Řešení: a) $$\int \frac{2}{(4x+7)^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} \text{substituce:} \\ t = 4x+7 \\ dt = 4dx \\ dx = \dfrac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \frac{2}{t^2}\frac{dt}{4} = \frac{1}{2}\int t^{-2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-t} + c = -\frac{1}{8x+14} + c$$

b) $$\int \cos(7x-18)dx = \left| \begin{array}{c} \text{substituce:} \\ t = 7x-18 \\ dt = 7dx \\ dx = \dfrac{dt}{7} \end{array} \right| = \int \frac{1}{7}\cos t\,dt = \frac{1}{7}\sin t + c = \frac{1}{7}\sin(7x-18) + c$$

c) $$\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \left| \begin{array}{c} \text{substiuce:} \\ t = \ln x \\ dt = \dfrac{1}{x}dx \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + c = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c.$$

Poznámka: Integrály z příkladu 7.3. a,b bylo možné samozřejmě vypočítat přímo pomocí vzorce XIV.

Substituce typu $x = \varphi(t)$

Věta 7.8.: Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu (a,b). Nechť prostá funkce $\varphi(t)$ má nenulovou derivaci na intervalu (α,β) a zobrazuje ho na interval (a,b). Pak na intervalu (a,b) platí

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt,$$

dosadíme-li do primitivní funkce na pravé straně $t = \varphi^{-1}(x)$, kde φ^{-1} je inverzní funkce k funkci φ.

Integraci substituční metodou provádíme podle následujícího schématu:

$$\int f(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{subst.}: x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right| = \int f(\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt = F(t) + c = F(\varphi^{-1}(x)) + c$$

Příklad 7.4.

Substituční metodou vypočítejte integrál: a) $\int \frac{dx}{(4+x)\sqrt{x}}$, b) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$.

Řešení: a) $\int \frac{dx}{(4+x)\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{2tdt}{(4+t^2)t} = 2\int \frac{dt}{(4+t^2)} = 2.\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + c =$

$= \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{2} + c$,

b) $\int \frac{(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{x+1}-1} dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ t = \sqrt{x+1} \\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{t+1}{t-1} \cdot 2tdt = 2\int \frac{t^2+t}{t-1} dt = 2.\int \left(t + 2 + \frac{2}{t-1} \right) dt =$

$= 2.\left(\frac{1}{2}t^2 + 2t + 2\ln|t-1| \right) + c = x + 1 + 4\sqrt{x+1} + 4.\ln\left|\sqrt{x+1} - 1\right| + c$.

Úlohy 7.2.

1. a) $\int (3x-4)^7 dx$, b) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{4+3\sin x}} dx$, c) $\int x^4 . \sin(x^5 - 1) dx$, d) $\int 5x.e^{x^2} dx$, e) $\int 5^{2x-3} dx$,

f) $\int \frac{7\ln^4 x}{x} dx$.

2. a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x}} dx$, b) $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx$, c) $\int \frac{1}{x.\sqrt{x-1}} dx$, d) $\int \frac{x}{1+\sqrt{3x+2}} dx$.

Výsledky úloh 7.2.

1. a) $\frac{1}{24}(3x-4)^8 + c$, b) $\frac{2}{3}\sqrt{4+3\sin x} + c$, c) $-\frac{1}{5}\cos(x^5-1) + c$, d) $\frac{5}{2}.e^{x^2} + c$,

e) $\frac{1}{2\ln 5} 5^{2x-3} + c$, f) $\frac{7}{5}\ln^5 x + c$.

2. a) $-\frac{2}{5}\sqrt{(4-x)^5} + \frac{16}{3}\sqrt{(4-x)^3} - 32\sqrt{4-x} + c$, b) $2.\sqrt{2x+1} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{2x+1}}{1-\sqrt{2x+1}}\right| + c$,

c) $2.\operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + c$, d) $\frac{2}{9}\left(\frac{\sqrt{(3x+2)^3}}{3} - \frac{3x+2}{2} - \sqrt{3x+2} + \ln\left(1+\sqrt{3x+2}\right) \right) + c$.

7.3 Integrace metodou per partes

Metodu per partes používáme pro integraci součinu dvou funkcí na základě následující věty.

Metoda per partes

Věta 7.9.: Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají na intervalu (a,b) spojité derivace. Pak existuje-li integrál na pravé straně rovnosti, platí

$$\int u(x).v'(x)\,dx = u(x).v(x) - \int u'(x).v(x)\,dx.$$

Název „per partes" (po částech), vyjadřuje skutečnost, že vzorec z uvedené věty převede původní integrál na jiný integrál. Metoda má smysl, pokud umíme řešit integrál na pravé straně rovnosti. Tento nový integrál pak řešíme pomocí základních vzorců, substitucí nebo opět metodou per partes.

Při použití metody per partes je důležitá volba funkcí u a v'. Provádíme ji pomocí následujících pravidel (v uvedeném pořadí) :

- za nederivovanou funkci volíme činitele, kterého neumíme integrovat,
- umíme-li integrovat oba činitele, potom za nederivovanou funkci volíme toho činitele, který se derivací více zjednoduší.

Příklad 7.5.

Metodou per partes vypočítejte integrál:

a) $\int x^3.\ln x\,dx$, b) $\int (x^2+1).e^{2x}dx$, c) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$, d) $\int e^x.\cos x\,dx$.

Řešení: a) Vzhledem k tomu, že funkci $\ln x$ neumíme integrovat, volíme ji za nederivovanou funkci a funkci x^3 volíme za derivovanou funkci:

$$\int x^3 \ln x dx = \begin{vmatrix} u=\ln x, u'=\dfrac{1}{x} \\ v'=x^3, v=\dfrac{x^4}{4}\end{vmatrix} = \frac{1}{4}x^4 \ln|x| - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^4}{4}dx = \frac{1}{4}x^4\ln|x| - \frac{1}{4}\int x^3 dx =$$

$$= \frac{1}{4}x^4.\ln|x| - \frac{1}{16}x^4 + c.$$

b) Umíme integrovat oba činitele, ale funkce x^2+1 se derivací více zjednoduší, proto ji volíme za nederivovanou.

$$\int\left(x^2+1\right)e^{2x}dx = \begin{vmatrix} u=x^2+1, u'=2x \\ v'=e^{2x}, v=\dfrac{1}{2}e^{2x}\end{vmatrix} = \left(x^2+1\right)\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int 2x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx =$$ (metodu per partes použijeme opakovaně) $$= \begin{vmatrix} u=x, & u'=1 \\ v'=e^{2x}, & v=\dfrac{1}{2}e^{2x}\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)e^{2x} - \left[x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)e^{2x} - \frac{1}{2}x\,e^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x}\frac{1}{2} + c = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2+1-x+\frac{1}{2}\right) + c = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2-x+\frac{3}{2}\right) + c.$$

c) Pokud při integraci součinu metodou per partes jeden činitel „chybí", lze ho nahradit konstantní funkcí $v(x)=1$.

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = \int 1.\operatorname{arctg} x\,dx = \begin{vmatrix} u'=1, & u=x \\ v=\operatorname{arctg} x, & v'=\dfrac{1}{1+x^2}\end{vmatrix} = x.\operatorname{arctg} x - \int\frac{x}{1+x^2}dx = x.\operatorname{arctg} x -$$

$$-\int\frac{x}{1+x^2}dx = x.\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx = x.\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + c.$$

d) Jestliže opakovaným použitím metody per partes dostaneme během výpočtu znovu původní integrál, převedeme výpočet integrálu na řešení rovnice.

$$\int e^x \cos x\, dx = \begin{vmatrix} u = e^x, & u' = e^x \\ v' = \cos x, & v = \sin x \end{vmatrix} = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^x, & u' = e^x \\ v' = \sin x, & v = -\cos x \end{vmatrix} = e^x \sin x - \left[-e^x \cos x - \int -e^x \cos x\, dx\right] =$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx .$$

Dále řešíme rovnici: $\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx$

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x(\sin x + \cos x)$$

Tedy celkem $\int e^x \cos x\, dx = \dfrac{e^x}{2}(\sin x + \cos x)$.

Úlohy 7.3.

Metodou per partes vypočítejte integrál: a) $\int x.\sin x dx$, b) $\int x.e^x dx$, c) $\int x.\ln(x+1) dx$, d) $\int (x+1)3^x dx$, e) $\int x^2 e^x dx$, f) $\int x^2 \sin x\, dx$, g) $\int (x^2 - x)e^{-x} dx$, h) $\int \ln x\, dx$, i) $\int \arcsin x\, dx$, j) $\int e^x \sin x\, dx$, k) $\int \cos^2 x\, dx$, l) $\int \sin(\ln x)\, dx$.

Výsledky úloh 7.3.

a) $-x\cos x + \sin x + c$, b) $e^x(x-1) + c$, c) $\dfrac{x^2}{2}\ln(x+1) - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\ln|x+1| + c$,

d) $(x+1)\dfrac{3^x}{\ln 3} - \dfrac{3^x}{\ln^2 3} + c$, e) $e^x(x^2 - 2x + 2) + c$, f) $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c$,

g) $-e^{-x}(x^2 + x + 1) + c$, h) $x \ln x - x + c$, i) $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$, j) $\dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$,

k) $\dfrac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + c$, l) $\dfrac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + c$.

7.4 Integrace některých typů funkcí

Integrace racionálních lomených funkcí

Jde o integrály tvaru $\int \dfrac{P(x)}{Q(x)} dx$. Postup při jejich výpočtu:

- Neryze lomenou racionální funkci vyjádříme dělením jako součet polynomu a ryze lomené funkce.
- Ryze lomenou racionální funkci integrujeme (je-li to možné) pomocí některého ze základních vzorců XII, XIII, XIV, XV (viz podkapitola 7.1.).
- !*!Pokud není možné ryze lomenou racionální funkci integrovat přímo pomocí základních vzorců, rozložíme ji na součet parciálních zlomků a ty pak integrujeme.

Zbývá tedy popsat integraci jednotlivých typů parciálních zlomků.

1) Integrál $\int \frac{A}{(ax+b)^n}\,dx$ řešíme vzorcem XV případně XIV, nebo můžeme použít substituci $t = ax+b$ (viz. příklad 7.2.).

2) Integrál $\int \frac{A}{ax^2+bx+c}\,dx$ řešíme rozkladem jmenovatele na čtverec a zbytek a pak použijeme vzorec XII (viz. příklad 7.1.).

3) !*!Integrál $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx$ upravíme na součet dvou integrálů tak, aby první z nich měl v čitateli derivaci jmenovatele a druhý konstantu :

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{M}{2}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + K\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx\,.$$

Konstantu K určíme z rovnice: $Mx+N = \frac{M}{2}(2ax+b)+K$.

První z integrálů pak řešíme vzorcem XV a druhý je integrál parciálního zlomku typu 2.

!*!Příklad 7.6.

Vypočítejte integrál $\int \frac{x+3}{x^2-4x+8}dx$.

Řešení : $\int \frac{x+3}{x^2-4x+8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx + K\int \frac{1}{x^2-4x+8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx +$

$$\left[x+3 = \frac{1}{2}(2x-4)+K \Rightarrow K=5\right]$$

$+5\int \frac{1}{(x-2)^2+4}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right| + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}+C$

!*!Příklad 7.7.

Vypočítejte integrály: a) $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx$, b) $\int \frac{dx}{x^3-1}$.

Řešení : a) $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx = \int \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}dx = \left|\text{rozložíme na parciální zlomky}\right| =$

$= \int \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}dx = \int \frac{2}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{6}{(x+1)^2}dx = 2\ln|x| - \ln|x+1| + \ + \frac{6}{x+1}+c$

b) $\int \frac{dx}{x^3-1} = \int \frac{dx}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)} = \left|\text{rozložíme na parciální zlomky}\right| \ = \int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\right)dx =$

$$\left[1 = A\left(x^2+x+1\right)+Bx(x-1)+C(x-1) \Rightarrow A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3},\ C=-\frac{2}{3}\right]$$

$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}(2x+4)}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\left(\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \right.$

$\left. + \int \frac{3}{x^2+x+1}dx\right) = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}\ln|x-1| -$

$-\frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

Integrace iracionálních funkcí

- Integrál iracionální funkce $\int R\left(x;\sqrt[n]{ax+b}\right)\,dx$ budeme řešit substitucí $t^n = ax+b$.

Příklad 7.8.

Vypočítejte integrál $\int \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt{x+2}}dx$.

Řešení: $\int \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt{x+2}}dx = \left|\begin{matrix} t^2 = x+2 \\ 2tdt = dx \end{matrix}\right| = \int \frac{t}{1+t}2tdt = 2\int \frac{t^2}{1+t}dt = |\text{dělíme}| = 2\int (t-1+$

$+\frac{1}{t+1})dt = 2\frac{1}{2}t^2 - 2t + 2\ln|t+1| + C = x+2-2\sqrt{x+2}+2\ln\left|\sqrt{x+2}+1\right| + C$

- !*!Integrál iracionální funkce $\int R\left(x;\sqrt[n_1]{ax+b},\sqrt[n_2]{ax+b},\ldots,\sqrt[n_k]{ax+b}\right)dx$ budeme řešit substitucí $t^s = ax+b$, kde s je nejmenší společný násobek čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Příklad 7.9.

Vypočítejte integrál $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

Řešení : $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx = \left|\begin{matrix} t^6 = x \\ 6t^5dt = dx \end{matrix}\right| = \int \frac{6t^5}{\sqrt{t^6}(1+\sqrt[3]{t^6})}dt = 6\int \frac{t^5}{t^3(1+t^2)}dt = 6\int \frac{t^2}{1+t^2}dt =$

$= 6\int (1-\frac{1}{t^2+1})dt = 6t - 6\operatorname{arctg} t + C = 6\sqrt[6]{x} - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C$

- !*!Integrál iracionální funkce $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ řešíme metodou neurčitých koeficientů.

  Výsledek integrálu přitom předpokládáme ve tvaru :

$$Q_{n-1}(x).\sqrt{ax^2+bx+c} + K\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad ,$$

kde $Q_{n-1}(x)$ je polynom o stupeň nižší než $P_n(x)$ a *K* je konstanta.

Rovnici postupně derivujeme, odstraníme zlomky a porovnáme koeficienty u stejných mocnin proměnné *x*. Řešením získané soustavy určíme koeficienty polynomu $Q_{n-1}(x)$ a konstantu *K*.

!*!Příklad 7.10.

Vypočítejte integrál $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

Řešení : $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = (ax+b).\sqrt{x^2+2x+2} + K\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ / rovnici derivujeme

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} = a.\sqrt{x^2+2x+2} + (ax+b)\cdot\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}} + \frac{K}{\sqrt{x^2+2x+2}} \quad /.\sqrt{x^2+2x+2}$$

$$x^2+1 = a.(x^2+2x+2) + (ax+b).(x+1) + K$$

Podobným postupem jako při rozkladu na parciální zlomky určíme, že $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}, K = \frac{3}{2}$.

Tedy $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right).\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{1}{2}(x-3)\cdot\sqrt{x^2+2x+2}+$

$+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \frac{1}{2}(x-3)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{3}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right|+c$.

Integrace goniometrických funkcí

Je-li možné integrovanou goniometrickou funkci upravit na tvar:

- $R(\sin x).\cos x$, řešíme integrál substitucí $t=\sin x$,
- $R(\cos x).\sin x$, řešíme integrál substitucí $t=\cos x$,

(pro převod jedné funkce na druhou často používáme vztah $1=\sin^2 x+\cos^2 x$).

Poznámka: Při integraci funkcí $\sin^2 x$ a $\cos^2 x$ využíváme pro snížení mocniny goniometrické vzorce $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

Příklad 7.11.

Vypočítejte integrály: a) $\int \sin^2 x\cdot\cos x dx$, b) $\int\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$, c) $\int\frac{1}{\cos x}dx$.

Řešení: a) $\int \sin^2 x\cdot\cos x\,dx = \left|\begin{matrix} t=\sin x \\ dt=\cos x dx\end{matrix}\right| = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3+c = \frac{1}{3}\sin^3 x+c$

b) $\int\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx = \int\frac{\sin^2 x.\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\sin x\,dx = \left|\begin{matrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx\end{matrix}\right| = -\int\frac{(1-t^2)}{(1+t^2)}dt =$

$=\int\frac{t^2-1}{t^2+1}dt = |\text{dělíme}| = \int 1dt+\int\frac{-2}{t^2+1}dt = t-2\operatorname{arctg}(t)+c = \cos x-2\operatorname{arctg}(\cos x)+c$

c) $\int\frac{1}{\cos x}dx = \left|\text{vynásobíme integrovanou funkci podílem } \frac{\cos x}{\cos x}\right| = \int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx =$

$=\left|\begin{matrix} t=\sin x \\ dt=\cos x\,dx\end{matrix}\right| = \int\frac{dt}{1-t^2} = |\text{vz. XIII}| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+c$

Úlohy 7.4.

1. a) $\int\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$, b) $\int\frac{dx}{x.(x+1)^2}$, c) $\int\frac{dx}{x^3+1}$.

2. a) $\int x.\sqrt{x-1}\,dx$, b) $\int\frac{2}{(x+3)\sqrt{x+1}}dx$, c) $\int\frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}}dx$, d) $\int\frac{1}{\sqrt[4]{x}(1+\sqrt{x})}dx$.

3. a) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$, b) $\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$, c) $\int\frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

4. a) $\int\cos^3 x\,dx$, b) $\int\sin^3 x.\cos^2 x\,dx$, c) $\int\operatorname{tg}^3 x\,dx$, d) $\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}dx$, e) $\int\frac{1}{\sin x.\cos x}dx$.

Výsledky úloh 7.4.

1. a) $x+3\ln|x-3|-3\ln|x-2|+c$, b) $\frac{1}{1+x}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+c$,

c) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$.

2. a) $\frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5+\frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3+c$, b) $\frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c$, c) $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+2\sqrt{x}+c$,

d) $2\sqrt{x}-4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+c$.

3. a) $\frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2-x+1}-\frac{1}{8}\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)+c$, b) $-\frac{8+4x^2+3x^4}{15}\cdot\sqrt{1-x^2}+c$,

c) $\frac{1}{6}\left(2x^2-5x+1\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+c$.

4. a) $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+c$, b) $\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+c$, c) $\ln|\cos x|+\frac{1}{2\cos^2 x}+c$,

d) $\cos x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+c$, e) $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{2}\ln|\sin x-1|-\frac{1}{2}\ln|\sin x+1|+c$.

Shrnutí kapitoly

Pojem primitivní funkce a neurčitého integrálu.

Platí-li $F'(x)=f(x)$ na intervalu $(a,b)\subseteq \mathbf{R}$, nazýváme funkci $F(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ na tomto intervalu. Takových funkcí je na daném intervalu nekonečně mnoho a liší se pouze o konstantu.

Množinu všech primitivních funkcí $F(x)+c$ na intervalu $(a,b)\subseteq \mathbf{R}$ nazýváme neurčitým integrálem funkce $f(x)$ a píšeme $\int f(x)\,dx=F(x)+c$.

Integrace pomocí základních vzorců.

Při integraci používáme základní vzorce, odvozené z derivování a pravidla, podle kterých platí : $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$ a $\int c.f(x)\,dx=c.\int f(x)\,dx.$

Integrace substituční metodou.

Integrace substituční metodou se provádí pomocí jednoho ze vztahů:

$$\int f(\varphi(x)).\varphi'(x)\,dx=\int f(t)\,dt \text{ nebo } \int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt.$$

Integrace metodou per partes.

Integrace metodou se provádí pomocí vztahu: $\int u(x).v'(x)\,dx=u(x).v(x)-\int u'(x).v(x)\,dx$.

Výpočet integrálů základních typů goniometrických, iracionálních a racionálních lomených funkcí.

Při integraci uvedených typů funkci používáme integrační postupy a substituce, které volíme na základě tvaru funkce.

Obsahuje-li iracionální funkce výraz $\sqrt[n]{ax+b}$, budeme ji integrovat substitucí $t^n=ax+b$.

Integrál funkce tvaru $R(\sin x).\cos x$ počítáme substitucí $t=\sin x$, zatímco integrál funkce tvaru $\int R\left(x;\sqrt[n]{ax+b}\right)dx$ řešíme substitucí $t^n=ax+b$.

Racionální lomenou funkci před integrací často rozkládáme na součet parciálních zlomků.

Klíčové pojmy

- primitivní funkce,
- neurčitý integrál,
- vzorce pro integrování,
- integrace substituční metodou,
- integrace metodou per partes.

Samostatný test

A. Teoretická část

1. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení :

a) Jestliže má daná funkce primitivní funkci, existuje těchto funkcí nekonečně mnoho a liší se pouze konstantou.

b) Grafy primitivních funkcí k dané funkci jsou posunuté ve směru osy x.

c) Neurčitý integrál součtu dvou funkcí je roven součinu neurčitých integrálů těchto funkcí (za předpokladu, že k daným funkcím na daném intervalu existují primitivní funkce).

d) Platnost integračních vzorců lze ověřit derivováním, protože integrování je opačný postup k derivování.

2. Opravte chyby v integračních vzorcích:

a) $\int x^n dx = \frac{x^{n-1}}{n-1} + c$, b) $\int \cos x dx = -\sin x + c$,

c) $\int \frac{1}{\sin x} dx = -\operatorname{cotg} x + c$, d) $\int e^x = e^x + c$,

e) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f'(x)| + c$, f) $\int \frac{1}{A^2 + x^2} dx = \frac{1}{A} \arcsin \frac{x}{A} + c$,

g) $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{b} F(ax+b) + c$.

3. Uveďte vztahy pro integrační metodu substituční a per partes.

4. Které dva termíny mají stejný význam: integrovaná funkce, primitivní funkce, integrand, integrál, diferenciál.

B. Praktická část

1. Pomocí základních vzorců a úpravami integrované funkce vypočtěte:

a) $\int (x-2)^2 (x^2+1) dx$, b) $\int \frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[4]{x}}{x\sqrt{x}} dx$, c) $\int (3.2^x - 5.\sin x + 1) dx$,

d) $\int \frac{4x^2 + 3ax - 1}{x^3} dx$, e) $\int \operatorname{cotg}^2 x\, dx$, f) $\int \frac{3}{9x^2+1} dx$, g) $\int \frac{5}{x^2+2x+5} dx$,

h) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+11}} dx$, i) $\int \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}} dx$, j) $\int 2 \operatorname{cotg} 3x\, dx$.

2. Integrujte racionální lomené funkce:

a) $\int \frac{2x^4 - x^2 - 2}{x^3 - 2x} dx$, b) $\int \frac{x^2-3}{x^2+1} dx$, c) $\int \frac{x+1}{x^2-2x+5} dx$, d) $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$.

3. Substituční metodou vypočítejte integrály: a) $\int 8x^2\left(x^3+2\right)^5 dx$, b) $\int \frac{3x}{\left(x^2+4\right)^3} dx$,

c) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$, d) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}} dx$, e) $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x-1}} dx$, f) $\int \cos^5 x\, dx$, g) $\int \sin^3 x \cos^2 x$.

4. Metodou per partes vypočítejte integrály:

a) $\int x.e^{2x} dx$, b) $\int x.\ln^2 x\, dx$, c) $\int (3x+2)\cos x\, dx$, d) $\int 2^x.\sin x\, dx$.